プラズマの基礎方程式

目次

参考文献

- 田中基彦・西川恭治 1991 「高温プラズマの物理学」(丸善) 第 4 章
- Sturrock, 1994, "Plasma Physics", Chapter 11

1　分布関数によるプラズマ記述と Vlasov 方程式

1.1　時間・空間スケールと、プラズマのミクロ・マクロな取扱い

粒子の、位置 $\boldsymbol{v}_\alpha$ と速度 $\boldsymbol{x}_\alpha$
（$s = \mathrm{p}, \mathrm{e}$ は粒子種【完全電離水素プラズマでは陽子と電子】、
$\alpha = 1, 2, 3, ...N$、N は粒子個数）
電磁場 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$

$\Downarrow$ 粗視化（Debye 長・Debye 長横断時間の範囲で平均化）

粒子運動論（kinetics）による扱い：
位相空間密度（phase space density） 単位は、個/cm^3/[cm/s]^3。$f_s(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, t)$
注：粒子分布関数（particle distribution function）とも呼ばれる。位相空間（phase space）とは、位置 $\boldsymbol{x}$ と速度 $\boldsymbol{v}$ との 6 次元からなる空間のこと。
電磁場 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$ も粗視化（平均量）する。

$\Downarrow$ $\boldsymbol{v}$ 依存性を議論しないとき（例：冷たいプラズマや、熱平衡系）は、
$\Downarrow$ $\boldsymbol{v}$ 次元の積分（モーメント積分、次節で詳述する)。

二流体（多流体 multi fluid ）としての扱い： 粒子種ごとの
個数密度 [個/cm^3]$n_s(\boldsymbol{x}, t)$
バルク速度 $\boldsymbol{V}_s(\boldsymbol{x}, t)$
内部エネルギー密度 [erg/cm^3] $e_{\mathrm{t}s}(\boldsymbol{x}, t)$

$\Downarrow$ 時間・空間スケールが、粒子種ごとの熱緩和時間・平均自由行程より大

温度 $T_s(\boldsymbol{x}, t)$ が定義できる。

$\Downarrow$ 時間・空間スケールが、粒子どうしの熱緩和時間・平均自由行程より大

流体としての扱い： 全粒子の
個数密度 [個/cm^3]$n(\boldsymbol{x}, t)$ や、または、質量密度 [g/cm^3]$\rho(\boldsymbol{x}, t)$
バルク速度 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}, t)$
内部エネルギー密度 [erg/cm^3] $e_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{x}, t)$
温度 $T(\boldsymbol{x}, t)$

1.2 Klimontovich 方程式

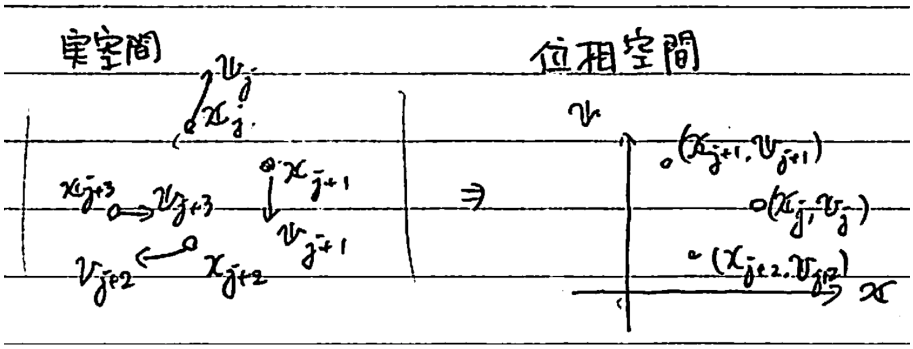

図 1　粒子群の表現方法。左：実空間（$\boldsymbol{x}$）における Lagrange 的表現。右：位相空間 $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{v}$）における Euler 的表現。

まずは、多数の粒子群を Euler 的に取り扱う方程式を示そう（この時点ではまだ、純中性・弱結合なプラズマとは限らない）。粒子種が s で表されるような粒子群（$\alpha = 1, 2, ...N_s$ で番号付）は位置 $\boldsymbol{x}_\alpha(t)$、速度 $\boldsymbol{v}_\alpha(t)$ で Lagrange 的に記述できる（図 1 左）。のちの便利のためにこれを Euler 的に取り扱い、6 次元の位相空間における個数密度 [個/cm^3/(cm/s)^3]

$$F_s(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, t) = \sum_{\alpha}^{N_s} F_\alpha(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{x}_\alpha(t), \boldsymbol{v}_\alpha(t)) = \sum_{\alpha}^{N_s} [\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_\alpha(t))\delta(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_\alpha(t))] \tag{1}$$

で示すことにする（図 1 右）。（式表現からわかるように、F_s は δ 関数で定義されていて、取扱いはまだ便利とは言い難く、ここでの議論は次節に続く途中のものであると考えてほしい。）

F_s の時間発展を記述する式を求めよう。$\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{v}$ を固定したまま t で偏微分すると

$$\frac{\partial F_s}{\partial t} = \sum_{\alpha}^{N_s} \left[\frac{\partial F_\alpha}{\partial \boldsymbol{x}_\alpha} \cdot \frac{d\boldsymbol{x}_\alpha}{dt} + \frac{\partial F_\alpha}{\partial \boldsymbol{v}_\alpha} \cdot \frac{d\boldsymbol{v}_\alpha}{dt} \right] \tag{2}$$

となる。粒子ごとの運動方程式

$$\frac{d\boldsymbol{x}_\alpha}{dt} = \boldsymbol{v}_\alpha \tag{3}$$

$$\frac{d\boldsymbol{v}_\alpha}{dt} = \frac{q_s}{m_s} \left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c} \boldsymbol{v}_\alpha \times \boldsymbol{B} \right) \tag{4}$$

を用いると

$$\frac{\partial F_s}{\partial t} = \sum_{\alpha}^{N_s} \left[\boldsymbol{v}_\alpha \cdot \frac{\partial F_\alpha}{\partial \boldsymbol{x}_\alpha} + \frac{q_s}{m_s} \left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c} \boldsymbol{v}_\alpha \times \boldsymbol{B} \right) \cdot \frac{\partial F_\alpha}{\partial \boldsymbol{v}_\alpha} \right] \tag{5}$$

となる。δ関数の性質を用いると右辺が変形でき

$$\frac{\partial F_s}{\partial t} = -\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial F_s}{\partial \boldsymbol{x}} - \frac{q_s}{m_s}\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\right)\cdot\frac{\partial F_s}{\partial \boldsymbol{v}} \tag{6}$$

となることが示せる。つまり

$$\frac{\partial F_s}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial F_s}{\partial \boldsymbol{x}} + \frac{q_s}{m_s}\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\right)\cdot\frac{\partial F_s}{\partial \boldsymbol{v}} = 0 \tag{7}$$

を得る。この式を Klimontovich 方程式と呼ぶ。

1.3 プラズマ運動論方程式と Vlasov 方程式

いま、プラズマ（準中性・弱結合の性質をもつ電離ガス）を考えることにしよう。これは「Debye 長と、Debye 長を粒子が横断する時間」より粗く粒子群を取り扱うことに対応する。そこで F_s と Klimontovich 方程式を、この空間・時間スケールで粗視化（平均化）することで、プラズマを扱う方程式を求めよう。

いま、物理量 Q に対する平均化演算子 $\overline{Q}$ を導入する。F_s に適用すると

$$F_s = \overline{F_s} + F_s' \tag{8}$$

となる。$\overline{F_s}$ が興味ある平均化後の量で、となる。F_s' は残りの揺動量である。Klimontovich 方程式に適用すると

$$\frac{\partial \overline{F_s}}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial \overline{F_s}}{\partial \boldsymbol{x}} + \frac{q_s}{m_s}\overline{\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\right)\cdot\frac{\partial F_s}{\partial \boldsymbol{v}}} = 0 \tag{9}$$

となる。左辺第 3 項を、各物理量の平均化量で表現すると残差があるため

$$\overline{\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\right)\cdot\frac{\partial F_s}{\partial \boldsymbol{v}}} = \left(\overline{\boldsymbol{E}} + \frac{1}{c}\boldsymbol{v}\times\overline{\boldsymbol{B}}\right)\cdot\frac{\partial \overline{F_s}}{\partial \boldsymbol{v}} + \mathcal{C} \tag{10}$$

となってしまう。以後、平均化後の位相空間密度を

$$f_s = \overline{F_s} \tag{11}$$

とし、$\overline{\boldsymbol{E}}$ と $\overline{\boldsymbol{V}}$ の上線を省略することにする。また残差を

$$\mathcal{C} = -\left(\frac{\partial f_s}{\partial t}\right)_c \tag{12}$$

と表現することにしよう。

結果、f_s が満たす式は

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \boldsymbol{x}} + \frac{q_s}{m_s}\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\right) \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \boldsymbol{v}} = \left(\frac{\partial f_s}{\partial t}\right)_c \tag{13}$$

となり、これをプラズマ運動論方程式と呼ぶ。特に無衝突プラズマでは右辺衝突項がゼロになり、

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \boldsymbol{x}} + \frac{q_s}{m_s}\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\right) \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \boldsymbol{v}} = 0 \tag{14}$$

が満たされ、これを Vlasov 方程式と呼ぶ。この式と Maxwell 方程式を連立して電磁場の発展とともに解く。また (13) の右辺衝突項を、小角散乱近似で評価したものを Fokker-Planck 方程式と呼ぶ（この講義では詳しく扱わない)。

2　流体方程式の運動論方程式からの導出

2.1　運動論方程式のモーメント積分

プラズマの位相空間密度 $f_s(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, t)$ の時間発展は、プラズマ運動論方程式（再掲）

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \boldsymbol{x}} + \frac{q_s}{m_s}\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\right) \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \boldsymbol{v}} = \left(\frac{\partial f_s}{\partial t}\right)_c \tag{15}$$

で記述できる。ただし s は粒子種（完全電離水素では陽子 p と電子 e）を表す。（位相空間に拡張した）直交座標系で表現し、その添え字について Einstein のルール（一つの項に同じ添え字が 2 度出たときは、成分 1 から 3 までの和をとる）を採用する（ただし、粒子種添え字 s には適用しない)。

(15) に、モーメント積分を施そう。これは、$\boldsymbol{v}$ の関数 $\Psi(\boldsymbol{v})$ を掛けて $\boldsymbol{v}$ について積分することを指す。その表現のために、記法として山かっこ $\langle\Psi\rangle_s$ を導入し、位相空間密度の速度依存性で重みを付けた関数 $\Psi(\boldsymbol{v})$ の平均

$$\langle\Psi\rangle_s = \frac{1}{n_s}\int \Psi(\boldsymbol{v}) f_s d\boldsymbol{v} \tag{16}$$

を表すとする。ただし

$$n_s(\boldsymbol{x}, t) = \int f_s d\boldsymbol{v} \tag{17}$$

は、実空間での粒子個数密度とする。すると、(15) は、

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial}{\partial t}\left(n_s\langle\Psi\rangle_s\right) \quad & + \tfrac{\partial}{\partial x_j}\left(n_s\langle\Psi v_j\rangle_s\right) - \tfrac{q_s}{m_s} n_s \left(E_j \left\langle \tfrac{\partial \Psi}{\partial v_j}\right\rangle_s + \epsilon_{jk\ell} B_\ell \left\langle v_k \tfrac{\partial \Psi}{\partial v_j}\right\rangle_s\right) \\ & = \int \Psi \left(\tfrac{\partial f_s}{\partial t}\right)_c d\boldsymbol{v} \end{aligned} \tag{18}$$

となる。

2.2　多流体方程式

式 (18) では、モーメント積分により、位相空間でみられたようなプラズマ物理量の速度 $\boldsymbol{v}$ 依存性がなくなり実空間 $\boldsymbol{x}$ と時刻 t だけが独立変数として残る。このような扱いをプラズマの流体（fluid）的な扱いと呼ぶ。いままだ、粒子種ごとに複数の流体（陽子流体と電子流体）が混在している状態なので多流体（あるいは二流体）である。さて、(18) を使うと、流体における保存則を導けるのでそれを示そう。

(a) 個数密度保存則

式 (18) に $\Psi = 1$ を代入する。衝突による粒子生成消滅はない、として右辺はゼロとする。左辺第 2 項の計算で、粒子群の速度の平均

$$\boldsymbol{V}_s = \langle \boldsymbol{v} \rangle_s \tag{19}$$

が現れるが、これは流体のバルク速度を表す。結果、

$$\frac{\partial n_s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(n_s V_{sj}) = 0 \tag{20}$$

という流体の個数密度の保存則が得られる。

個々の粒子はバルク速度との差

$$\boldsymbol{w}_s = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{V}_s \tag{21}$$

を持つが、これは流体の圧力や内部エネルギーとして取り扱われる（以下で詳述)。

(b) 運動量保存則

式 (18) に $\Psi = m_s v_i$ を代入すると、

$$\frac{\partial}{\partial t}(n_s m_s V_{si}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(n_s m_s \langle v_i v_j \rangle) - q_s n_s \left(E_i + \frac{1}{c}\epsilon_{ijk} V_{sj} B_k \right) = K_{si} \tag{22}$$

となる。右辺の衝突による運動量交換項を

$$K_{si} = \int m_s v_i \left(\frac{\partial f_s}{\partial t} \right)_c d\boldsymbol{v} \tag{23}$$

と表した。ここで左辺第 2 項を扱うにあたり、個々の粒子速度とバルク速度とに差があることから生じる分を圧力テンソル

$$p_{sij} = n_s m_s (\langle v_i v_j \rangle - V_{si} V_{sj}) = n_s m_s \langle w_{si} w_{sj} \rangle \tag{24}$$

として導入すると、

$$\frac{\partial}{\partial t}(n_s m_s V_{si}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(n_s m_s V_{si} V_{sj} + p_{sij}) - q_s n_s \left(E_i + \frac{1}{c}\epsilon_{ijk} V_{sj} B_k \right) = K_{si} \tag{25}$$

という流体の運動量保存則が得られる。

(c) エネルギー保存則

式 (18) に $\Psi = (1/2) m_s v^2 = (1/2) m_s v_k v_k$ を代入すると、

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2} n_s m_s \langle v^2 \rangle\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{2} n_s m_s \langle v^2 v_j \rangle\right) - q_s n_s E_j V_{sj} = H_s \tag{26}$$

となる。右辺の衝突によるエネルギー交換項を

$$H_s = \int \frac{1}{2} m_s v^2 \left(\frac{\partial f_s}{\partial t}\right)_c d\boldsymbol{v} \tag{27}$$

と表した。ここで左辺第 1 項のカッコの中は、

$$\frac{1}{2} n_s m_s \langle v^2 \rangle = \frac{1}{2} n_s m_s (V_s^2 + \langle w_s^2 \rangle) = \frac{1}{2} n_s m_s V_s^2 + e_{\mathrm{t}s} \tag{28}$$

となる。ただし、平均からの差分速度 $\boldsymbol{w}_s$ の運動エネルギーを内部エネルギーとして扱い

$$e_{\mathrm{t}s} = \frac{1}{2} n_s m_s \langle w_{sk} w_{sk} \rangle \tag{29}$$

とした。また左辺第 2 項内の

$$\langle v^2 v_j \rangle = \langle v_k v_k v_j \rangle = V_{sk} V_{sk} V_{sj} + \langle w_{sk} w_{sk} \rangle V_{sj} + 2 V_{sk} \langle w_{sk} w_{sj} \rangle + \langle w_{sk} w_{sk} w_{sj} \rangle \tag{30}$$

なので、熱流束

$$Q_{si} = \frac{1}{2} m_s n_s \langle w_s^2 w_{si} \rangle \tag{31}$$

を導入し、圧力テンソル (24) 内部エネルギー (29) を用いると、

$$\frac{1}{2} n_s m_s \langle v^2 v_j \rangle = \frac{1}{2} n_s m_s V_s^2 V_{sj} + V_{sj} e_{\mathrm{t}s} + V_{sk} p_{skj} + Q_{sj} \tag{32}$$

となる。以上より、

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial}{\partial t}\left(e_{\mathrm{t}s} + \tfrac{1}{2} n_s m_s V_s^2\right) \quad & + \tfrac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(e_{\mathrm{t}s} + \tfrac{1}{2} n_s m_s V_s^2\right) V_{sj} + V_{sk} p_{skj} + Q_{sj}\right] \\ & - q_s n_s E_j V_{sj} = H_s \end{aligned} \tag{33}$$

という流体のエネルギー保存則が得られる。

(d) ここまでのまとめ

粒子数 (20) 運動量 (25) エネルギー (33) の各保存則の流体発展方程式を求めた。電磁場以外の従属変数は粒子種（$s = \mathrm{p}, \mathrm{e}$）ごとの個数密度 n_s、バルク速度 $\boldsymbol{V}_s$、内部エネルギー $e_{\mathrm{t}s}$ であるが、これに圧力テンソル p_{sij}、熱流束 Q_{sj} をこれらの変数の関数として表現するいわゆる閉包関係（closure relation）が必要である。（一流体の場合であればこれは気体の状態方程式が対応する。）また右辺に現れる衝突交換項 K_{si}、H_s もモデル表現が必要である。

2.3　粒子種ごとに熱平衡な多流体方程式

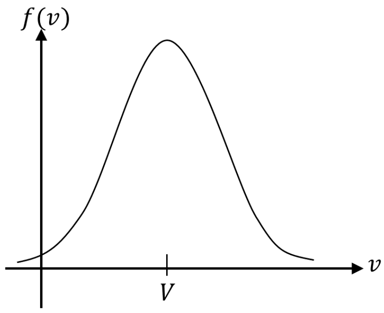

図 2　熱平衡状態にある粒子群の Maxwell 分布

熱平衡状態が成立している場合、粒子分布関数が Maxwell 分布（図 2、平均速度 $\boldsymbol{V}_s$ を中心軸とする Gauss 関数）になる。Maxwell 分布が等方的な場合 (粒子ごとに一温度な場合)、

$$p_{sij} = p_s \delta_{ij} \tag{34}$$

$$Q_j = 0 \tag{35}$$

また

$$e_{\mathrm{t}s} = \frac{3}{2} p_s \tag{36}$$

となる。(36) は、粒子種ごとの気体状態方程式にあたる。このとき、

$$\frac{\partial n_s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(n_s V_{sj}) = 0 \tag{37}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(n_s m_s V_{si}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(n_s m_s V_{si} V_{sj}) + \frac{\partial p_s}{\partial x_i} - q_s n_s \left(E_i + \frac{1}{c} \epsilon_{ijk} V_{sj} B_k \right) = K_{si} \tag{38}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(e_{\mathrm{t}s} + \frac{1}{2} n_s m_s V_s^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(e_{\mathrm{t}s} + p_s + \frac{1}{2} n_s m_s V_s^2 \right) V_{sj} \right] - q_s n_s E_j V_{sj} = H_s \tag{39}$$

という多流体方程式を得る。

2.4　一流体方程式と Ohm の法則

異なる粒子種どうしの衝突が十分に起こると、$\boldsymbol{V}_s$ や温度 T_s がほぼ等しくなる。このときは一流体として扱うのがよい。ただし、正負電荷流体間で、ほぼ等しいとはいえ、速度 $\boldsymbol{V}_s$ にわずかな差があると電流を生じる。そのことで（一般化）Ohm の法則を導くことができる。

一流体を特徴づける量の、質量密度

$$\rho = \sum_s m_s n_s \tag{40}$$

電荷密度

$$\zeta = \sum_s q_s n_s \tag{41}$$

バルク速度

$$\boldsymbol{V} = \frac{1}{\rho} \sum_s m_s n_s \boldsymbol{V}_s \tag{42}$$

電流密度

$$\boldsymbol{J} = \sum_s q_s n_s \boldsymbol{V}_s \tag{43}$$

内部エネルギー密度

$$e_{\mathrm{t}} = \sum_s e_{\mathrm{t}s} \tag{44}$$

圧力

$$p = \sum_s p_s \tag{45}$$

を導入して以下で用いる。

(a) 質量・電荷・運動量・エネルギー保存則

個数保存則 (37) で、粒子質量をかけて和をとると

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho V_j) = 0 \tag{46}$$

という質量保存則を、粒子電荷をかけて和を取ると

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\zeta V_j) = 0 \tag{47}$$

という電荷保存則を得る。次にエネルギー保存則 (39) で粒子間だけでエネルギー交換が成り立つとする（輻射や電離過程を無視する）と

$$\sum_s H_s = 0 \tag{48}$$

であることに注意して、和をとると

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(e + \frac{1}{2}\rho V^2\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(e + p + \frac{1}{2}\rho V^2\right) V_j\right] - J_j E_j = 0 \tag{49}$$

というエネルギー保存則を得る。運動量保存則 (38) で、衝突による運動量交換はキャンセルするので

$$\sum_s K_{si} = 0 \tag{50}$$

が成立する。和をとると

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho V_i V_j) + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \zeta E_i - \frac{1}{c}\epsilon_{ijk} J_j B_k = 0 \tag{51}$$

を得る。最後に、(36) についても和をとり、

$$e_{\mathrm{t}} = \frac{3}{2}p \tag{52}$$

とすると、一流体の気体状態方程式にあたる。

(b) Ohm の法則

(38) から一般化 Ohm の法則が得られるのでそれを求めよう。q_s/m_s をかけて和をとると

$$\begin{aligned} &\tfrac{\partial J_i}{\partial t} + \tfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\textstyle\sum_s q_s n_s V_{si} V_{sj}\right) + \tfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\textstyle\sum_s \tfrac{q_s}{m_s} p_s\right) \\ &-E_i\left(\textstyle\sum_s \tfrac{q_s^2}{m_s} n_s\right) - \tfrac{1}{c}\epsilon_{ijk} B_k \left(\textstyle\sum \tfrac{q_s^2}{m_s} n_s V_{sj}\right) = \textstyle\sum_s \tfrac{q_s}{m_s} K_{si} \end{aligned} \tag{53}$$

となる。いま完全電離水素プラズマを考えて、$s = \mathrm{p}, \mathrm{e}$ について

$$q_{\mathrm{p}} = -q_{\mathrm{e}} = e \tag{54}$$

$$m_{\mathrm{p}} \gg m_{\mathrm{e}} \tag{55}$$

を用いよう。また衝突項について、電子の陽子との衝突頻度 ν_{ep} を導入して、速度差 $\boldsymbol{V}_{\mathrm{e}} - \boldsymbol{V}_{\mathrm{p}}$ に比例するような力を受けるとすると、

$$\sum_s \frac{q_s}{m_s} K_{si} \approx \frac{-e}{m_{\mathrm{e}}} K_{\mathrm{e}i} = -\nu_{\mathrm{ep}} e n_{\mathrm{e}} (V_{\mathrm{e}i} - V_{\mathrm{p}i}) = \nu_{\mathrm{ep}} J_i \tag{56}$$

さらに電気抵抗 η をこの衝突頻度で決まると考えて

$$\eta = \frac{m_{\mathrm{e}}}{n_{\mathrm{e}} e^2} \nu_{\mathrm{ep}} \tag{57}$$

と導入する。

その結果、整理したあとの (53) は

$$\frac{m_{\rm e}}{m_{\rm p}}(\frac{m_{\rm p}}{e})^2\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial J_i}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(V_iJ_j+V_jJ_i-\frac{m_{\rm p}}{e\rho}J_iJ_j\right)\right]-\frac{m_{\rm p}}{e}\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_{\rm e}}{\partial x_i}-\frac{m_{\rm p}}{e}\frac{1}{c\rho}\epsilon_{ijk}J_jB_k \\ =\left(E_i+\frac{1}{c}\epsilon_{ijk}V_jB_k\right)-\eta J_i \tag{58}$$

となり、これが（完全電離水素プラズマの）一般化 Ohm の法則である。左辺第 1 項（[ ] の中）を電子慣性項、第 2 項を電子傾圧項、第 3 項を Hall 項、右辺の η に比例する項を Ohm 抵抗項とそれぞれ呼ぶ。

さらに、（いわゆる普通の）Ohm の法則を求めよう。そのために、各項の大きさを比較して、項を適宜省略するが、比較基準として左辺第 4 項のカッコの中の V_jB_k の項（VB 項と呼ぶ）を用いる。

$$\frac{\text{電子慣性項}}{\text{VB 項}}\approx\frac{(c/\omega_{\rm pe})^2}{L^2} \tag{59}$$

$$\frac{\text{電子傾圧項}}{\text{VB 項}}\approx\frac{V_{\rm Te}}{V}\frac{V_{\rm Te}/\Omega_{\rm ce}}{L} \tag{60}$$

$$\frac{\text{Hall 項}}{\text{VB 項}}\approx\frac{C_{\rm A}}{V}\frac{(c/\omega_{\rm pp})}{L} \tag{61}$$

ただし、$\omega_{\rm pe}$ は電子プラズマ振動数、$\omega_{\rm pp}$ は陽子プラズマ振動数、$V_{\rm Te}$ は電子熱速度、$C_{\rm A}$ は Alfvén 速度、$\Omega_{\rm ce}$ は電子ジャイロ周波数、V は系の典型的な速さを表す（詳細な定義は次節以後で改めて登場する）。系の典型的な空間大きさ L が、十分大きければいずれの比も 1 より小さくなる。その結果 (58) の左辺はすべて省略でき、

$$E_i+\frac{1}{c}\epsilon_{ijk}V_jB_k=\eta J_i \tag{62}$$

という Ohm の法則を得る。

(c) 一流体方程式のまとめ

質量 (46) 電荷 (47) 運動量 (51) エネルギー (49) の各保存則と状態方程式 (52) Ohm の法則 (62) からなる流体方程式を求めた。従属変数は質量密度 ρ、バルク速度 $\boldsymbol{V}$、内部エネルギー $e_{\rm t}$、圧力 p、電荷密度 ζ、電流密度 $\boldsymbol{J}$ と電磁場 $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ で、電磁場の Maxwell 方程式と合わせると、方程式は閉じている。独立変数は、実空間位置 $\boldsymbol{x}$ と時刻 t でもとのプラズマ運動論方程式よりかなり扱いやすい（が適用に制限条件があることに注意)。