荷電粒子の運動

目次

参考文献

- F. F. チェン 「プラズマ物理入門」 第 2 章 （内田岱二郎 訳 1977 丸善）

1　この節で扱う粒子運動の仮定

一般に…、

荷電粒子の運動 時刻 t の位置 $\boldsymbol{x}(t)$ と速度 $\boldsymbol{v}(t)$

運動方程式

Lorentz 力

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} + \frac{q}{c}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \tag{1}$$

電磁場の変化 $\boldsymbol{E}(t, \boldsymbol{x})$、$\boldsymbol{B}(t, \boldsymbol{x})$

Maxwell 方程式 電荷と電流の分布

これらが相互作用をしながら同時に発展していく。

しかし、この節では、（数が少ないなどで）粒子が場に与える影響が弱く、電磁場が与えられたものとして、その中での粒子運動を考察する。

運動方程式は

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = q\boldsymbol{E} + \frac{q}{c}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \tag{2}$$

ただし m、q は粒子の質量と電荷で、この節ではともに定数とする。

2　磁場中での運動

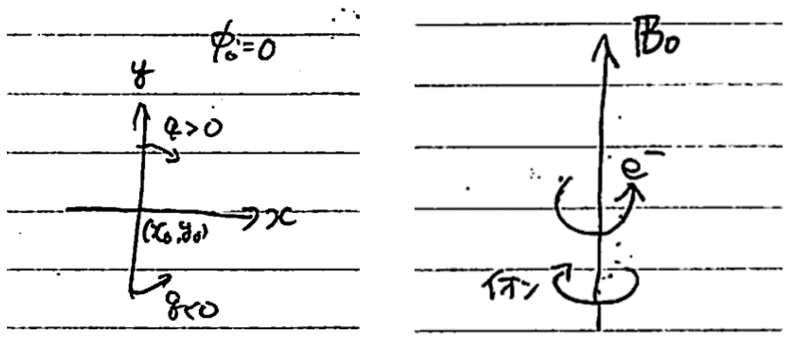

図 1　一様な磁場中での粒子運動

磁場を $\boldsymbol{B}=B_0\hat{\boldsymbol{z}}$（$B_0>0$ は定数、$\hat{\boldsymbol{z}}$ は z 座標単位ベクトル)、電場 $\boldsymbol{E}=0$ とする。まず直感的には、磁場から受ける Lorentz 力（$q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$）が速度に対して垂直にはたらくため、磁場に垂直な面では円運動になる。一方、磁場に平行には力がないため等速直線運動になる。これらを重ね合わせた螺旋運動が期待される（図 1)。

運動式を成分ごとに書くと

$$m\frac{dv_x}{dt}=\frac{q}{c}B_0v_y \tag{3}$$

$$m\frac{dv_y}{dt}=-\frac{q}{c}B_0v_x \tag{4}$$

$$m\frac{dv_z}{dt}=0 \tag{5}$$

となる。x、y 成分は組み合わせて

$$\frac{d^2v_x}{dt^2}=-{\Omega_c}^2v_x \tag{6}$$

$$\frac{d^2v_y}{dt^2}=-{\Omega_c}^2v_y \tag{7}$$

ただし

$$\Omega_c = \frac{|q|B_0}{mc} \tag{8}$$

は、ジャイロ（角）周波数（または、サイクロトロン周波数）と呼ばれる。解くと、速度は

$$v_x = v_\perp \cos(\Omega_c t + \phi_0) \tag{9}$$

$$v_y = -\frac{|q|}{q} v_\perp \sin(\Omega_c t + \phi_0) \tag{10}$$

$$v_z = v_\parallel \tag{11}$$

となる（$v_\perp$、$v_\parallel$、ϕ_0 は定数。添字の $\perp$、$\parallel$ は各々磁場に「垂直」「平行」を意味する。）。これらを再度積分すると位置

$$x = -r_g \sin\left(\Omega_c t + \phi_0\right) + x_0 \tag{12}$$

$$y = \frac{|q|}{q} r_g \cos\left(\Omega_c t + \phi_0\right) + y_0 \tag{13}$$

$$z = v_\parallel t + z_0 \tag{14}$$

を得る（x_0、y_0、z_0 は定数）。ここで

$$r_g = \frac{|v_\perp|}{\Omega_c} \tag{15}$$

はジャイロ半径（または、Larmor 半径）。この位置（軌道）は、xy 面に投影すると円を示す。陽子などの正電荷 $q > 0$ では磁場の向きに対して左ネジが進む方向（左手巻）、電子などの負電荷 $q < 0$ では右ネジが進む方向（右手巻）。磁場平行方向の運動 $v_\parallel$ と合成すると、螺旋運動をする。このような運動を、ジャイロ運動と呼ぶ。

3　磁場・電場中での運動：$\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}$ ドリフト

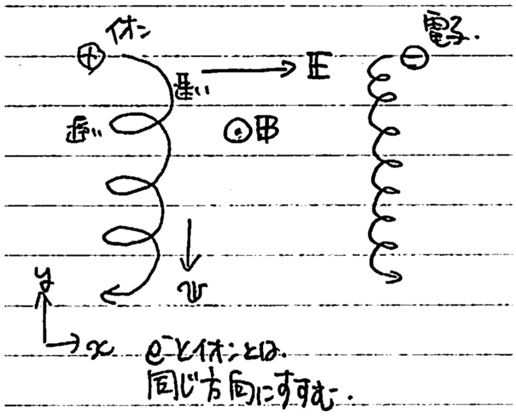

図 2　一様な磁場・一様電場中での粒子運動。$\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}$ ドリフト

簡単な場合を考え、磁場を $\boldsymbol{B} = B_0 \hat{\boldsymbol{z}}$、電場 $\boldsymbol{E} = E_0 \hat{\boldsymbol{x}}$ とする（図 2）$B_0 > 0$、$E_0 > 0$ は定数、$\hat{\boldsymbol{x}}$、$\hat{\boldsymbol{z}}$ は x、z 座標の基本単位ベクトル)。Lorentz 力を、磁場から受ける力と電場から受ける力とに分けて考えよう。直感的には、磁場からの力の結果は前節のジャイロ運動になりそうである。同時に電場による力を受けるが、電場力と同じ向きに運動しているときは速さが増え（加速し)、逆のときは減る（減速する)。ジャイロ運動では円軌道半径が速さに比例するので、円運動の位相によって半径が時間変化することになり、結果としてジャイロ運動中心が並進運動する（これをドリフト運動という)。粒子の軌道は、、ジャイロ運動とドリフト運動との重ね合わせとなることが期待される。

運動式を成分ごとに書くと

$$m\frac{dv_x}{dt} = qE_0 + \frac{q}{c}B_0 v_y \tag{16}$$

$$m\frac{dv_y}{dt} = -\frac{q}{c}B_0 v_x \tag{17}$$

となる。z 成分は前節と同様に等速運動になるので略した。組合せて

$$\frac{d^2 v_x}{dt^2} = -{\Omega_c}^2 v_x \tag{18}$$

$$\frac{d^2 v_y}{dt^2} = -{\Omega_c}^2 \left(v_y + c\frac{E_0}{B_0} \right) \tag{19}$$

となる。ここで

$$\tilde{v_x} = v_x \tag{20}$$

$$\tilde{v_y} = v_y + c\frac{E_0}{B_0} \tag{21}$$

と変数変換する、つまり、現在の基準系に対して相対速度が

$$\boldsymbol{U} = -c\frac{E_0}{B_0}\hat{\boldsymbol{y}} \tag{22}$$

である基準系に移ると

$$\frac{d^2\tilde{v}_x}{dt^2} = -{\Omega_c}^2\tilde{v_x} \tag{23}$$

$$\frac{d^2\tilde{v}_y}{dt^2} = -{\Omega_c}^2\tilde{v_y} \tag{24}$$

と、前節のジャイロ運動になる。もとの基準系に戻すと「ジャイロ運動 $\tilde{\boldsymbol{v}}$ と、ジャイロ中心の並進運動 $\boldsymbol{v}_E = \boldsymbol{U}$ との重ね合わせ」となる。磁場・電場の向きが一般的な場合に拡張すると

$$\boldsymbol{v}_E = c\frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}}{B^2} \tag{25}$$

であることが示せる。このようなジャイロ中心の運動のことを一般にドリフトといい、この節で示した磁場と電場との共存状況によるドリフトを $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ ドリフト（イークロスビー=ドリフト）と呼ぶ。$\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ ドリフトは、粒子の電荷の正負に依存せず同じ方向であることがおもしろい。

4　磁場と外力場との中での運動

磁場 $\boldsymbol{B}$ と同時に、一様一定な外力 $\boldsymbol{F}$ が粒子にかかっているような場合を考えよう。前節の電場による力は $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}$ であったことから類推できるように、この場合のドリフト運動は

$$\boldsymbol{v}_F = \frac{c}{q}\frac{\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{B}}{B^2} \tag{26}$$

となる。この場合は（$\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ ドリフトと異なり）粒子の電荷の正負に依存した方向になることに注意する。

5　空間勾配をもつ磁場中での運動：磁気勾配ドリフト

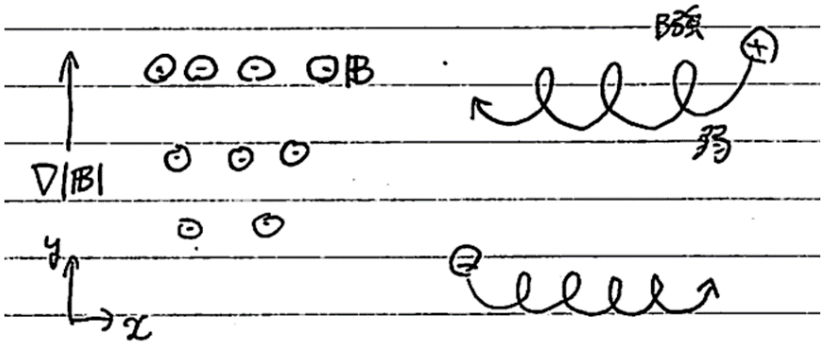

図 3　空間勾配のある磁場中での粒子運動

磁場が、空間的に非一様なとき（空間勾配をもつとき）を考えよう（図 3)。電場はゼロとする。前節までと同様に、ジャイロ運動とドリフト運動との重ね合わせで考えられる。ジャイロ半径は（ジャイロ周波数を通して）磁場強度 $|\boldsymbol{B}|$ に反比例するので、磁場が強い箇所では半径が小さく、弱い箇所では大きい。$\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ ドリフトとの類推で分かるように、磁場に垂直な平面内では、$\nabla|\boldsymbol{B}|$ の等値線に沿ってドリフト運動することが期待できる。

いま磁場の分布を $\boldsymbol{B}=B(y)\hat{\boldsymbol{z}}$ で、勾配の空間スケール $L=|\boldsymbol{B}|/|\nabla|\boldsymbol{B}||$ はジャイロ半径より十分大きい（$r_g \ll L$）としよう。このとき、粒子初期位置（原点とする）付近の磁場は

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{B}(0)+\boldsymbol{x}\cdot(\nabla\boldsymbol{B})|_0+... \tag{27}$$

と書ける。このとき Lorentz 力は

$$\boldsymbol{F}\approx\frac{q}{c}\left\{\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}(0)+\boldsymbol{v}\times[\boldsymbol{x}\cdot(\nabla\boldsymbol{B})|_0]\right\} \tag{28}$$

成分ごとに考えて

$$F_x\approx\frac{q}{c}\left[v_yB(0)+v_y y\left.\frac{dB}{dy}\right|_0\right] \tag{29}$$

$$F_y \approx \frac{q}{c}\left[-v_x B(0) - v_x y \left.\frac{dB}{dy}\right|_0\right] \tag{30}$$

となる。ドリフト運動だけを求めたいので、ジャイロ周期分の時間平均

$$\bar{F} = \frac{\Omega_c}{2\pi}\int_0^{2\pi/\Omega_c} F dt \tag{31}$$

に着目する。被積分項の速度・位置は（一様磁場 $B(0)$ のもとでの）ジャイロ運動 (9)、(10)、(13) で近似して、計算すると

$$\bar{F}_x = 0 \tag{32}$$

$$\bar{F}_y = -\frac{1}{2}\frac{|q|}{c} v_\perp r_g \left.\frac{dB}{dy}\right|_0 \tag{33}$$

となる。つまり x 方向にはゼロ、y 方向には定数で電荷の符号に依存しない向きにはたらく。外力によるドリフト（第 4 節）での議論を応用すると、この場合のドリフト運動は (26) より

$$\boldsymbol{v}_F = \frac{c}{q}\frac{\bar{F}_y}{B}\hat{\boldsymbol{x}} \tag{34}$$

と、x 方向に一定速度となる。一般的な場合では

$$\boldsymbol{v}_{\nabla B} = \frac{1}{2}\frac{|q|}{q} v_\perp r_g \frac{\boldsymbol{B}\times(\nabla \boldsymbol{B})}{B^2} \tag{35}$$

となり、磁気勾配ドリフト、あるいは gradB ドリフト（グラッド=ビー=ドリフト）と呼ばれる。

6　曲がった磁力線場中での運動：湾曲ドリフト

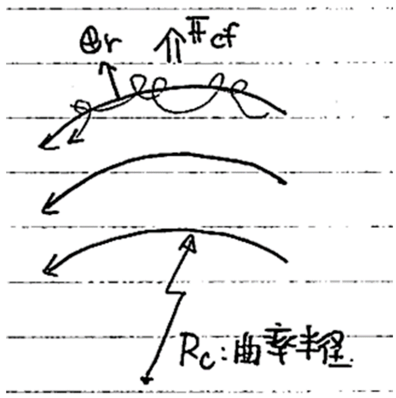

図 4　曲がった磁力線場中での粒子運動

磁力線の曲率半径 R_c がジャイロ半径より十分大きいような曲がった磁力線中での運動を考えよう（図 4)。ジャイロ運動のために、粒子は磁力線に巻き付くような運動をする。磁場に平行な速度成分 $v_\parallel$ の向きは、粒子運動に伴い磁力線に沿って変化する。このとき粒子には遠心力

$$\boldsymbol{F}_{cf} = m v_\parallel^2 \frac{1}{R_c} \boldsymbol{e}_r \tag{36}$$

がはたらいている。ただし $\boldsymbol{e}_r$ は、曲率中心から粒子位置へ向いた単位ベクトルである。外力によるドリフト（第 4 節）での議論を応用すると、この場合のドリフト運動は (26) より

$$\boldsymbol{v}_R = \frac{|q|}{q} \frac{\boldsymbol{F}_{cf} \times \boldsymbol{B}}{B^2} \tag{37}$$

となる。

7　その他のドリフト

前節までに説明した以外にも、時間変化する電場による分極ドリフト、非一様電場によるドリフトなどさまざまなドリフト運動が存在する。