

MHD 衝撃波

2006. 2. 12.

1 はじめに

このモデルパッケージは、2次元平面内での MHD 衝撃波問題を解くためのものである。

2 仮定と基礎方程式

流体は非粘性・圧縮性流体とする。計算領域は2次元デカルト座標 (xy 平面) で $\partial/\partial z = 0$ 、 $V_z = 0$ 、 $B_z = 0$ と仮定する。解くのは、密度 ρ 、圧力 p 、速度 V_x 、 V_y 、磁場 B_x 、 B_y についての2次元 MHD 方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho V_y) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V_x) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho V_x^2 + p + \frac{B^2}{8\pi} - \frac{B_x^2}{4\pi} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho V_x V_y - \frac{B_x B_y}{4\pi} \right) = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V_y) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho V_x V_y - \frac{B_x B_y}{4\pi} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho V_y^2 + p + \frac{B^2}{8\pi} - \frac{B_y^2}{4\pi} \right) = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(B_x) + \frac{\partial}{\partial y}(cE_z) = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(B_y) - \frac{\partial}{\partial x}(cE_z) = 0 \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho V^2 + \frac{B^2}{8\pi} \right) &+ \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} p + \frac{1}{2} \rho V^2 \right) V_x - c \frac{B_y E_z}{4\pi} \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} p + \frac{1}{2} \rho V^2 \right) V_y + c \frac{B_x E_z}{4\pi} \right] = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

$$cE_z = -V_x B_y + V_y B_x \quad (7)$$

である。ここで、 γ は比熱比。

3 無次元化

計算コードの中では、変数は以下のように無次元化して扱われる (表1参照)。長さ、速度、時間の単位はそれぞれ L_0 、 C_{S0} 、 L_0/C_{S0} 。ここで、 L_0 は計算領域の大きさ、 C_{S0} は高圧側の音速の $\gamma^{-1/2}$ 倍。密度は高圧側の値 ρ_0 で無次元化する。以下、無次元化した変数を使う。

変数	規格化単位
x, y	L_0
V_x, V_y	C_{S0}
t	L_0/C_{S0}
ρ	ρ_0
p	$\rho_0 C_{S0}^2$
B_x, B_y	$\sqrt{\rho_0 C_{S0}^2}$

表 1: 変数と規格化単位

4 パラメータ・初期条件・計算条件・境界条件

$|x| < 1/2$ 、 $|y| < 1/2$ の領域を解く。初期状態は以下のようなもの。サブルーチン `model` で設定する。

$$\begin{aligned}\rho &= \rho_0 + (\rho_1 - \rho_0) \frac{1}{2} \left[1 + \tanh \left(\frac{s}{w} \right) \right] \\ p &= p_0 + (p_1 - p_0) \frac{1}{2} \left[1 + \tanh \left(\frac{s}{w} \right) \right] \\ V_x &= V_y = 0 \\ B_x &= B_{00} \cos \theta_i + B_{x0} + (B_{x1} - B_{x0}) \frac{1}{2} \left[1 + \tanh \left(\frac{s}{w} \right) \right] \\ B_y &= B_{00} \sin \theta_i + B_{y0} + (B_{y1} - B_{y0}) \frac{1}{2} \left[1 + \tanh \left(\frac{s}{w} \right) \right]\end{aligned}$$

ただし、

$$s = x \cos \theta_i + y \sin \theta_i$$

$w = 0.02$ は数値不安定を避けるための遷移幅。

境界条件は、すべて自由境界条件。サブルーチン `bnd` で設定する。

計算パラメータは以下の通り（表 3 参照）。

パラメータ	値	コード中での変数名	設定サブルーチン名
比熱比 γ	2	gm	model
高圧側圧力 p_0	1	pr0	model
高圧側密度 ρ_0	1	ro0	model
高圧側磁場 B_{x0} B_{x0}	$-\sin \theta_i$	bx0	model
高圧側磁場 B_{y0} B_{y0}	$\cos \theta_i$	by0	model
低圧側圧力 p_1	0.1	pr1	model
低圧側密度 ρ_1	0.125	ro1	model
低圧側磁場 B_{x1} B_{x1}	$\sin \theta_i$	bx1	model
低圧側磁場 B_{y1} B_{y1}	$-\cos \theta_i$	by1	model
初期不連続の角度 θ_i	60 度	thini	model
初期不連続に垂直な磁場 B_{00}	0.75	b00	model

表 2: おもなパラメータ

パラメータ	値	コード中での変数名	設定サブルーチン名
グリッド数 x 方向	107	ix	main
グリッド数 y 方向	107	jx	main
マージン	4	margin	main
終了時刻	0.1	tend	main
出力時間間隔	0.02	dtout	main
CFL 数	0.4	safety	main
進行時刻下限値	10^{-10}	dtmin	main

表 3: おもな数値計算パラメータ。マージンとは、境界の値を格納するための配列の「そで」部分の幅のこと。進行時刻下限値とは、各計算ステップの Δt の値がこの値を下回ったときに計算を強制終了するための臨界値。