

MHD 衝撃波管

ver. 1

1 はじめに

このモデルパッケージは MHD 衝撃波管問題をシミュレーションするためのものである。MHD 衝撃波管問題は流体の衝撃波管問題の磁気流体力学への応用であり、基本的なテスト問題として利用される。流体の衝撃波管問題と同様に、一定の断面積をもった管の中に異なる熱力学的状態や磁場を持つ流体を左右に分けて入れておき、その後の状態を求める。

MHD 衝撃波管問題は Brio & Wu (1988) や Ryu & Jones (1995) によるものがある。ここでは Brio & Wu (1988) の初期条件とその後の進化について説明する。初期状態としては、密度と圧力の不連続に加えて曲がった磁場が流体を貫いているのが特徴である。時間進化の性質は以下の通りである。

- 初期不連続面の高温、高密度のガス側に fast 膨張波 (fast rarefaction wave) が広がっていく。
- 接触不連続面の後方に slow compound wave があらわれる。compound wave とは MHD 衝撃波管問題で現れる特有の波であり、衝撃波 (shock) に膨張波 (rarefaction wave) が付随した構造を持つ。
- 密度の接触不連続面 (contact discontinuity) があらわれる。
- 接触不連続面の前方に slow 衝撃波 (slow shock) が伝播する。
- 初期不連続面の低温、低密度のガス側にも fast 膨張波 (fast rarefaction wave) が広がっていく。

2 仮定と基礎方程式

本コードでは、計算空間を半分に分け、右半分の密度・圧力を変え、垂直方向磁場成分を加えて、その後の波の伝播を追跡する。仮定は以下の通りである。(1) 1 次元の MHD 方程式系を解く。(2) 流路は断面積一様。(3) 非粘性・圧縮性流体として扱う。計算領域は $x \in [-0.5L, 0.5L]$ で、 $x = 0$ に初期不連続をおく。基礎方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x} (\rho V_x) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho V_x) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho V_x^2 + p + \frac{B_x^2 + B_y^2}{8\pi} \right] = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho V_y) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho V_x V_y - \frac{B_x B_y}{4\pi} \right] = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} B_y + \frac{\partial}{\partial x} E_z = 0 \quad (4)$$

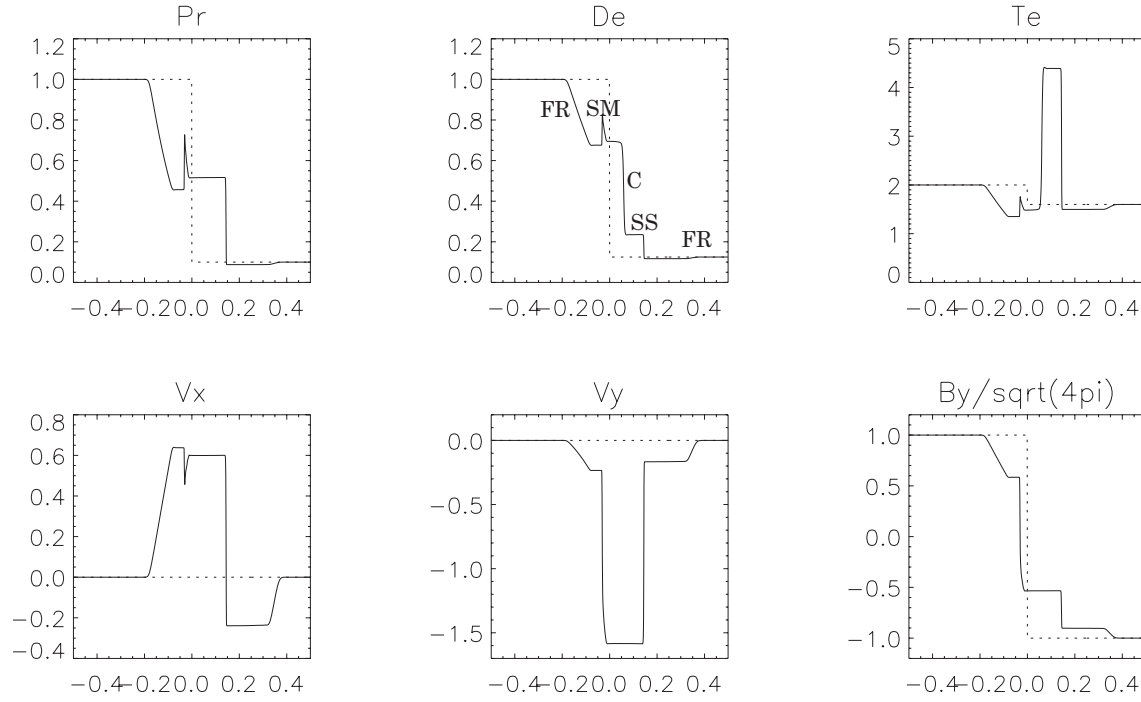


図 1: Roe 法による MHD 衝撃波管の計算結果. 図において、FR は fast rarefaction wave、SM は slow compound wave、C は contact discontinuity、SS は slow shock をあらわす.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho V_x^2 + \rho V_y^2 + \frac{B_x^2 + B_y^2}{8\pi} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} p + \frac{1}{2} \rho V_x^2 + \rho V_y^2 \right) V_x + \frac{B_y E_z}{4\pi} \right] = 0 \quad (5)$$

$$E_z = V_x B_y - V_y B_x \quad (6)$$

ここで、 γ は比熱比でパラメータ、他の記号は通常の意味。磁場の x 成分は変化せず、時間発展は解かない。空間分布は

$$B_x = \text{一定} \quad (7)$$

であり、 B_x の一定値はパラメータである。

3 無次元化

変数は以下のように無次元化して扱われる（表 1 参照）。基本規格化単位は、領域長 L 、 $x < 0$ 側の密度 ρ_0 と圧力 p_0 とである。速度は $V_0 = \sqrt{p_0/\rho_0}$ 、時間は L_0/V_0 、磁場は $\sqrt{p_0}$ で規格化される。

4 初期条件と境界条件

初期分布は以下のようなものである。

$$\rho = \rho_0, \quad p = p_0, \quad V_x = V_0, \quad V_y = V_{y0}, \quad B_y = B_{y0}, \quad x < 0 \quad (8)$$

$$\rho = \rho_1, \quad p = p_1, \quad V_x = V_1, \quad V_y = V_{y1}, \quad B_y = B_{y1}, \quad x > 0 \quad (9)$$

パラメータは ρ_1/ρ_0 、 p_1/p_0 、 V_0/C_{S0} 、 V_1/C_{S0} 、 B_{y0}/B_0 、 B_{y1}/B_0 である。デフォルトでは Brio & Wu の条件が入れてある。

境界条件は $x = -0.5L$ 、 $x = 0.5L$ とともに

$$\partial\rho/\partial x = 0, \quad \partial p/\partial x = 0, \quad V_x = 0, \quad \partial V_y/\partial x = 0, \quad \partial B_y/\partial x = 0, \quad (10)$$

5 パラメータ

表 1 参照。

パラメータ	変数	無次元値
非熱比	γ	2.0
x 磁場	B_x/B_0	$0.75 * \sqrt{4\pi}$
密度比	ρ_1/ρ_0	0.125
圧力比	p_1/p_0	0.1
負側 x 速度	V_{x0}/V_0	0
負側 y 速度	V_{y0}/V_0	0
負側 y 磁場	B_{y0}/B_0	$\sqrt{4\pi}$
正側 x 速度	V_{x1}/V_0	0
正側 y 速度	V_{y1}/V_0	0
正側 y 磁場	B_{y1}/B_0	$-\sqrt{4\pi}$
計算領域長	L	1
負側密度	ρ_0	1
負側圧力	p_0	1
負側音速	C_{S0}	$\sqrt{2}$

表 1: パラメータと無次元化単位

グリッド点は $i \in [1, 1001]$ 。グリッド間隔は、0.001。

6 応用例

ここでは応用例として、Ryu & Jones (1995) による初期値パラメータを 8 つあげておく。図の番号は論文のものである。

1. Fig. 1a. ($t = 0.08$)

left state : $(\rho, V_x, V_y, B_x, B_y, p) = (1, 10, 0, 5, 5, 20)$

right state : $(\rho, V_x, V_y, B_x, B_y, p) = (1, -10, 0, 5, 5, 1)$

2. Fig. 1b. ($t = 0.03$)
left state : $(\rho, V_x, V_y, B_x, B_y, p) = (1, 0, 0, 3, 5, 1)$
right state : $(\rho, V_x, V_y, B_x, B_y, p) = (0.1, 0, 0, 3, 2, 10)$
3. Fig. 3b. ($t = 0.1$)
left state : $(\rho, V_x, V_y, B_x, B_y, p) = (1, -1, 0, 0, \sqrt{4\pi}, 1)$
right state : $(\rho, V_x, V_y, B_x, B_y, p) = (1, 1, 0, 0, \sqrt{4\pi}, 1)$
4. Fig. 4a. ($t = 0.15$)
left state : $(\rho, V_x, V_y, B_x, B_y, p) = (1, 0, 0, \sqrt{4\pi}, \sqrt{4\pi}, 1)$
right state : $(\rho, V_x, V_y, B_x, B_y, p) = (0.2, 0, 0, \sqrt{4\pi}, 0, 0.1)$
5. Fig. 4b. ($t = 0.15$)
left state : $(\rho, V_x, V_y, B_x, B_y, p) = (0.4, -0.66991, 0.98263, 1.3\sqrt{4\pi}, 0.0025293\sqrt{4\pi}, 0.52467)$
right state : $(\rho, V_x, V_y, B_x, B_y, p) = (1, 0, 0, 1.3\sqrt{4\pi}, 0, 1)$
6. Fig. 4c. ($t = 0.15$)
left state : $(\rho, V_x, V_y, B_x, B_y, p) = (0.65, 0.667, -0.257, 0.75\sqrt{4\pi}, 0.55\sqrt{4\pi}, 0.5)$
right state : $(\rho, V_x, V_y, B_x, B_y, p) = (1, 0.4, -0.94, 0.75\sqrt{4\pi}, 0, 0.75)$
7. Fig. 5a. ($t = 0.1$)
left state : $(\rho, V_x, V_y, B_x, B_y, p) = (1, 0, 0, 0.75\sqrt{4\pi}, \sqrt{4\pi}, 1)$
right state : $(\rho, V_x, V_y, B_x, B_y, p) = (0.125, 0, 0, 0.75\sqrt{4\pi}, -\sqrt{4\pi}, 0.1)$
8. Fig. 5b. ($t = 0.16$)
left state : $(\rho, V_x, V_y, B_x, B_y, p) = (1, 0, 0, 1.3\sqrt{4\pi}, \sqrt{4\pi}, 1)$
right state : $(\rho, V_x, V_y, B_x, B_y, p) = (0.4, 0, 0, 1.3\sqrt{4\pi}, -\sqrt{4\pi}, 0.4)$

7 参考文献

- Brio, M. & Wu, C. C. 1988, J. Comp. Phys., 75, 400
Ryu, D. & Jones, T. W. 1995 ApJ, 442, 228