

反射衝撃波

2006. 1. 9.

1 はじめに

このモデルパッケージは、2次元平面内での非線形波面（衝撃波・膨張波・接触不連続）の相互作用を解くためのものである。基本的には、Woodward & Colella (1984) の計算に倣っている。

2 仮定と基礎方程式

流体は非粘性・圧縮性流体とする。計算領域は2次元デカルト座標 (xy 平面) で $\partial/\partial z = 0$ 、 $V_z = 0$ と仮定する。解くのは、密度 ρ 、圧力 p 、速度 V_x 、 V_y についての2次元 Euler 方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho V_y) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V_x) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x^2 + p) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho V_x V_y) = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V_y) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x V_y) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho V_y^2 + p) = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho V^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} p + \frac{1}{2} \rho V^2 \right) V_x \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} p + \frac{1}{2} \rho V^2 \right) V_y \right] = 0 \quad (4)$$

である。ここで、 γ は比熱比。

3 無次元化

計算コードの中では、変数は以下のように無次元化して扱われる（表1参照）。長さ、速度、時間の単位はそれぞれ L_0 、 C_{S0} 、 L_0/C_{S0} 。ここで、 L_0 は計算領域の y 方向の大きさ、 C_{S0} は初期一様状態の音速。密度は初期一様状態の値 ρ_0 の $1/\gamma$ 倍で無次元化する。以下、無次元化した変数を使う。

4 パラメータ・初期条件・計算条件・境界条件

$0 < x < X_{\text{bnd}}$ 、 $0 < y < Y_{\text{bnd}}$ の領域を解く。初期状態は以下のようなもの。サブルーチン model で設定する。衝撃波上流側（静止流体側） $x > (-\tan \theta_{\text{in}})y + X_{\text{edge}}$ では

$$\rho = \rho_0 \quad (= \gamma \text{ で固定})$$

$$p = p_0 \quad (= 1 \text{ で固定})$$

変数	規格化単位
x, y	L_0
V_x, V_y	C_{S0}
t	L_0/C_{S0}
ρ	ρ_0
p	$\rho_0 C_{S0}^2$

表 1: 変数と規格化単位

$$V_x = 0$$

$$V_y = 0$$

衝撃波下流側（流入流側） $x \leq (-\tan \theta_{\text{in}})y + X_{\text{edge}}$ では

$$\rho = \rho_1$$

$$p = p_1$$

$$V_x = V_{x1}$$

$$V_y = V_{y1}$$

ここで、流入流の速度は、

$$V_{x1} = MC_{S0} \cos \theta_{\text{in}}$$

$$V_{y1} = MC_{S0} \sin \theta_{\text{in}}$$

とする。 $C_{S0} = \sqrt{\gamma p_0 / \rho_0}$ は静止流体側の音速、 θ_{in} は流入流の x 軸に対する角度、 M は流入流の Mach 数。 ρ_1 、 p_1 、 V_{x1} 、 V_{y1} などは、 M で決まる Rankine-Hugoniot 条件をみたすように決める。

パラメータ	値	コード中での変数名	設定サブルーチン名
比熱比 γ	7/5	gm	model
流入流 Mach 数 M	10	rmach	model
流入流角度 θ_{in}	-30 度	thetain	model
反射壁縁の位置 X_{edge}	1/6	xedge	model

表 2: おもなパラメータ

境界条件は、流入流部分は固定値境界。つまり「 $x = 0$ 」と「 $0 < x < X_{\text{in}}$ かつ $y = Y_{\text{bnd}}$ 」と「 $0 < x < X_{\text{edge}}$ かつ $y = 0$ 」とでは

$$\rho = \rho_1, \quad p = p_1, \quad V_x = V_{x1}, \quad V_y = V_{y1}$$

とする。ただし

$$X_{\text{in}} = X_{\text{edge}} - \tan \theta_{\text{in}} Y_{\text{bnd}} + MC_{S0} / \cos \theta_{\text{in}}$$

反射壁部分つまり「 $x > X_{\text{edge}}$ かつ $y = 0$ 」では対称境界。それ以外「 $x > X_{\text{in}}$ かつ $y = Y_{\text{bnd}}$ 」と「 $x = X_{\text{bnd}}$ 」とでは自由境界。

計算パラメータは以下の通り（表 3 参照）。

パラメータ	値	コード中での変数名	設定サブルーチン名
境界の位置 x 方向 X_{bnd}	4	—	model
境界の位置 y 方向 Y_{bnd}	1	—	model
グリッド数 x 方向	489	ix	main
グリッド数 y 方向	129	jx	main
マージン	4	margin	main
終了時刻	0.2	tend	main
出力時間間隔	0.02	dtout	main
CFL 数	0.4	safety	main
進行時刻下限値	10^{-10}	dtmin	main

表 3: おもな数値計算パラメータ。マージンとは、境界の値を格納するための配列の「そで」部分の幅のこと。進行時刻下限値とは、各計算ステップの Δt の値がこの値を下回ったときに計算を強制終了するための臨界値。

5 参考文献

Woodward, P., Colella, P., 1984, JCP, **54**, 115-173.