

衝撃波

2006. 1. 12.

1 はじめに

このモデルパッケージは、2次元平面内での衝撃波問題を解くためのものである。

2 仮定と基礎方程式

流体は非粘性・圧縮性流体とする。計算領域は2次元デカルト座標 (xy 平面) で $\partial/\partial z = 0$ 、 $V_z = 0$ と仮定する。解くのは、密度 ρ 、圧力 p 、速度 V_x 、 V_y についての2次元 Euler 方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho V_y) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V_x) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x^2 + p) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho V_x V_y) = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V_y) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x V_y) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho V_y^2 + p) = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho V^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} p + \frac{1}{2} \rho V^2 \right) V_x \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} p + \frac{1}{2} \rho V^2 \right) V_y \right] = 0 \quad (4)$$

である。ここで、 γ は比熱比。

3 無次元化

計算コードの中では、変数は以下のように無次元化して扱われる (表 1 参照)。長さ、速度、時間の単位はそれぞれ L_0 、 C_{S0} 、 L_0/C_{S0} 。ここで、 L_0 は計算領域の大きさ、 C_{S0} は高圧側の音速の $\gamma^{-1/2}$ 倍。密度は高圧側の値 ρ_0 で無次元化する。以下、無次元化した変数を使う。

| 変数 | 規格化単位 |
|------------|-------------------|
| x, y | L_0 |
| V_x, V_y | C_{S0} |
| t | L_0/C_{S0} |
| ρ | ρ_0 |
| p | $\rho_0 C_{S0}^2$ |

表 1: 変数と規格化単位。 ρ_0 、 C_{S0} は初期一様状態の値。

4 パラメータ・初期条件・計算条件・境界条件

$|x| < 1/2$ 、 $|y| < 1/2$ の領域を解く。初期状態は以下のようなもの。サブルーチン `model` で設定する。

$$\rho = \rho_0 + (\rho_1 - \rho_0) \frac{1}{2} \left[1 + \tanh \left(\frac{s}{w} \right) \right]$$

$$p = p_0 + (p_1 - p_0) \frac{1}{2} \left[1 + \tanh \left(\frac{s}{w} \right) \right]$$

$$V_x = V_y = 0$$

ただし、

$$s = x \cos \theta_i + y \sin \theta_i$$

$w = 0.02$ は数値不安定を避けるための遷移幅。

| パラメータ | 値 | コード中での変数名 | 設定サブルーチン名 |
|---------------------|-------|-----------|-----------|
| 比熱比 γ | 7/5 | gm | model |
| 高圧側圧力 p_0 | 1 | pr0 | model |
| 高圧側密度 ρ_0 | 1 | ro0 | model |
| 低圧側圧力 p_1 | 0.1 | pr1 | model |
| 低圧側密度 ρ_1 | 0.125 | ro1 | model |
| 初期不連続の角度 θ_i | 60 度 | thini | model |

表 2: おもなパラメータ

境界条件は、すべて自由境界条件。サブルーチン `bnd` で設定する。

計算パラメータは以下の通り（表 3 参照）。

| パラメータ | 値 | コード中での変数名 | 設定サブルーチン名 |
|--------------|------------|-----------|-----------|
| グリッド数 x 方向 | 107 | ix | main |
| グリッド数 y 方向 | 107 | jx | main |
| マージン | 4 | margin | main |
| 終了時刻 | 0.14154 | tend | main |
| 出力時間間隔 | 0.05 | dtout | main |
| CFL 数 | 0.4 | safety | main |
| 進行時刻下限値 | 10^{-10} | dtmin | main |

表 3: おもな数値計算パラメータ。マージンとは、境界の値を格納するための配列の「そで」部分の幅のこと。進行時刻下限値とは、各計算ステップの Δt の値がこの値を下回ったときに計算を強制終了するための臨界値。