

超新星 Sedov 解

2006. 1. 12.

1 はじめに

このモデルパッケージは、2次元平面内（軸対称 rz 面内）での Sedov 解を解くためのものである。

2 仮定と基礎方程式

流体は非粘性・圧縮性流体とする。計算領域は2次元円柱座標（ rz 平面）で $\partial/\partial\phi = 0$ 、 $V_\phi = 0$ と仮定する。解くのは、密度 ρ 、圧力 p 、速度 V_r 、 V_z についての2次元 Euler 方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho) + \frac{\partial}{\partial r}(\rho V_r) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho V_z) = -\frac{1}{r}(\rho V_r) \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V_r) + \frac{\partial}{\partial r}(\rho V_r^2 + p) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho V_r V_z) = -\frac{1}{r}(\rho V_r^2) \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V_z) + \frac{\partial}{\partial r}(\rho V_r V_z) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho V_z^2 + p) = -\frac{1}{r}(\rho V_r V_z) \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p}{\gamma-1} + \frac{1}{2} \rho V^2 \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\left(\frac{\gamma}{\gamma-1} p + \frac{1}{2} \rho V^2 \right) V_r \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left(\left(\frac{\gamma}{\gamma-1} p + \frac{1}{2} \rho V^2 \right) V_z \right) = -\frac{1}{r} \left(\left(\frac{\gamma}{\gamma-1} p + \frac{1}{2} \rho V^2 \right) V_r \right) \end{aligned} \quad (4)$$

である。ここで、 $V^2 = V_r^2 + V_z^2$ 、 γ は比熱比。なお計算コード上では r は x 座標で、 z は z 座標で表現されている。

3 無次元化

計算コードの中では、変数は以下のように無次元化して扱われる（表1参照）。長さ、速度、時間の単位はそれぞれ L_0 、 C_{S0} 、 L_0/C_{S0} 。ここで、 L_0 は、（境界から注入される）ジェットの半径、 C_{S0} は初期一様状態の音速。密度は初期一様状態の値 ρ_0 で無次元化する。以下、無次元化した変数を使う。

変数	規格化単位
r, z	L_0
V_r, V_z	C_{S0}
t	L_0/C_{S0}
ρ	ρ_0
p	$\rho_0 C_{S0}^2$

表 1: 変数と規格化単位

4 パラメータ・初期条件・計算条件・境界条件

$0 < r < 1$ 、 $0 < z < 1$ の領域を解く。初期状態は以下のようなもの。サブルーチン `model` で設定する。

$$\rho = 1$$

$$p = p_{\text{ism}} + (1/\gamma - p_{\text{ism}}) \exp[-(r/w)^2]$$

$$V_r = V_z = 0$$

ここで

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

パラメータ	値	コード中での変数名	設定サブルーチン名
比熱比 γ	5/3	gm	model
擾乱の印加範囲 w	0.02	wexp	model
周囲星間物質の圧力 p_{ism}	10^{-8}	prism	model

表 2: おもなパラメータ

境界条件は、以下の通り。サブルーチン `bnd` で設定。 $z = 0$ は対称境界条件。すなわち V_z は「絶対値が等しく符号反転で鏡面配置」、 ρ 、 p 、 V_r は「絶対値・符号が等しく鏡面配置」。 $z = Z_{\text{bnd}}$ で、自由境界条件。すなわち、すべての物理量の z 方向微分がゼロ。 $r = 0$ で、対称境界条件。すなわち V_r は「絶対値が等しく符号反転で鏡面配置」、 ρ 、 p 、 V_z は「絶対値・符号が等しく鏡面配置」。 $r = R_{\text{bnd}}$ で、自由境界条件。すなわち、すべての物理量の r 方向微分がゼロ。

計算パラメータは以下の通り（表 3 参照）。

5 参考文献

パラメータ	値	コード中での変数名	設定サブルーチン名
グリッド数 r 方向	203	ix	main
グリッド数 z 方向	202	jx	main
マージン	4	margin	main
終了時刻	5	tend	main
出力時間間隔	0.5	dtout	main
CFL 数	0.4	safety	main
進行時刻下限値	10^{-10}	dtmin	main

表 3: おもな数値計算パラメータ。マージンとは、境界の値を格納するための配列の「そで」部分の幅のこと。進行時刻下限値とは、各計算ステップの Δt の値がこの値を下回ったときに計算を強制終了するための臨界値。